FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

# 3. DERIVACE FUNKCE

## 3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémy funkce
## 3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body
## 3.9 Asymptoty grafu funkce
## 3.10 Průběh funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

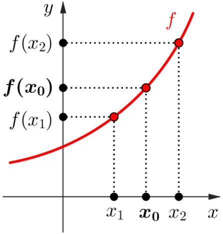
## Definice

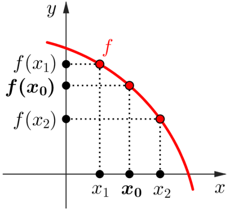
Funkce $f$ je **rostoucí v bodě** $x_0$, existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : \quad f(x_1) < f(x_0)$,
2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : \quad f(x_2) > f(x_0)$.

Funkce $f$ je **klesající v bodě** $x_0$, existuje-li okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

1) $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : \quad f(x_1) > f(x_0)$,
2) $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : \quad f(x_2) < f(x_0)$.



### Věta

Má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ derivaci

- $f'(x_0) > 0$, pak je funkce $f$ v bodě $x_0$ **rostoucí**,
- $f'(x_0) < 0$, pak je funkce $f$ v bodě $x_0$ **klesající**.

### Věta

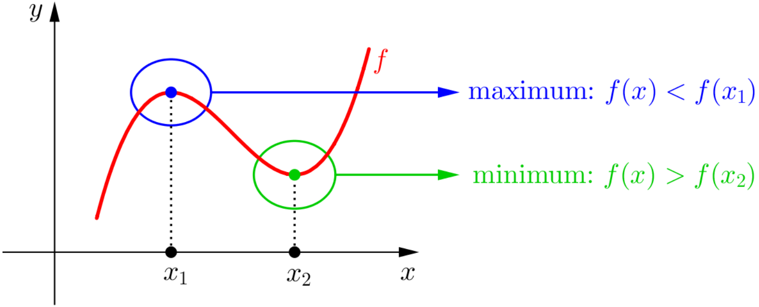
Je-li funkce $f$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li v intervalu $(a, b)$ derivaci

- $f'(x) > 0$, pak je funkce $f$ **rostoucí na intervalu** $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$,
- $f'(x) < 0$, pak je funkce $f$ **klesající na intervalu** $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

## Definice

Funkce $f$ má v bodě $x_0 \in D(f)$
ostré **lokální minimum**, resp. ostré **lokální maximum**,
jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta) \subset D(f)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí
$f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

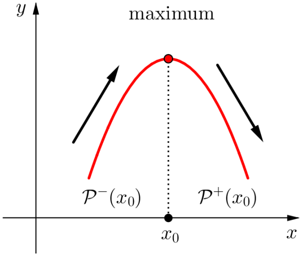
Ostré lokální maximum a minimum nazýváme ostré **lokální extrémy**.

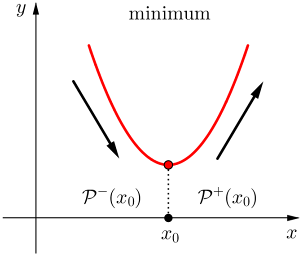


### Věta

Je-li funkce $f$ spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že $f$ je

- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ rostoucí a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ klesající, pak má $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum,
- v $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ klesající a v $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$ rostoucí, pak má $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum.



Funkce $f$ může mít lokální extrémy

a) v bodech, v nichž $f'(x_0) = 0$ ... **stacionární body**,

b) v bodech, v nichž $f$ nemá derivaci.

**Věta**

Je-li $f'(x_0) = 0$ a má-li funkce $f$ v bodě $x_0$ druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostrý lokální extrém a to

- ostré lokální maximum, je-li $f''(x_0) < 0$,
- ostré lokální minimum, je-li $f''(x_0) > 0$.

### Příklad

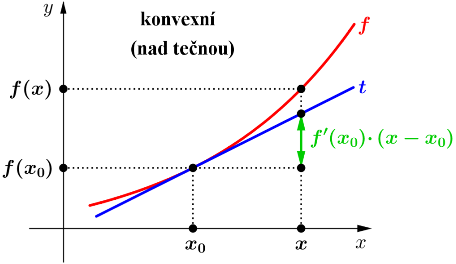
Určete intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

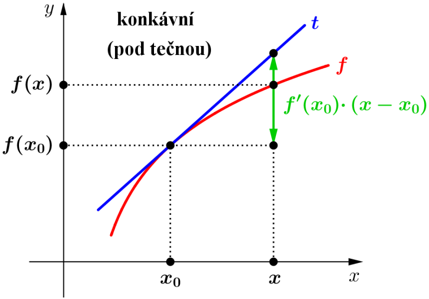
## Definice

Má-li funkce $f$ derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že $f$ je v bodě $x_0$ ryze **konvexní**, resp. ryze **konkávní**, jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí

$\boldsymbol{f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$, resp. $\boldsymbol{f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$,

tj. graf funkce $f$ leží v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ nad tečnou, resp. pod tečnou, sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



### Věta

Má-li funkce $f$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ druhou derivaci $f''(x_0)$, pak je-li

- $f''(x_0) > 0$, je $f$ v bodě $x_0$ ryze konvexní,
- $f''(x_0) < 0$, je $f$ v bodě $x_0$ ryze konkávní.

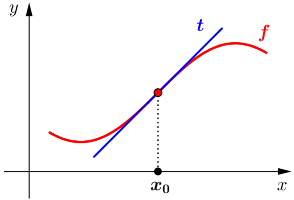
### Věta

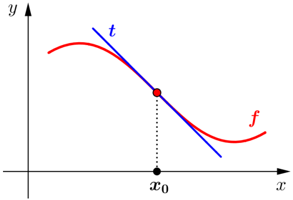
Je-li funkce $f$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li v intervalu $(a, b)$ druhou derivaci

- $f''(x) > 0$, pak je funkce $f$ **konvexní na intervalu $\langle a, b \rangle$**,
- $f''(x) < 0$, pak je funkce $f$ **konkávní na intervalu $\langle a, b \rangle$**.

## Definice

Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ **inflexní bod**, jestliže v $x_0$ existuje tečna ke grafu funkce $f$ a $f''$ mění v $x_0$ znaménko, tj. funkce se v $x_0$ mění z konvexní na konkávní, nebo obráceně.




Pro inflexní bod $x_0$ funkce $f$ platí:

a) $f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0,$ nebo

b) $f''(x_0)$ neexistuje.

### Příklad

Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce $f(x) = x \ln(x-1)$.

## Definice (Asymptota bez směrnice)

Přímka

$$\boldsymbol{x = x_0}$$

se nazývá **asymptota bez směrnice** funkce $f$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže má funkce $f$ v bodě $x_0$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

### Asymptoty bez směrnice

- nazýváme také **svislé asymptoty**
- mohou být v bodech nespojitosti funkce, tj. v bodech $x_0 \notin D(f)$, nebo na okraji definičního oboru
- jsou rovnoběžné s osou $y$

## Definice (Asymptota se směrnicí)

Přímka

$$\boldsymbol{y = ax + b}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

se nazývá **asymptota se směrnicí** funkce $f$ pro $x \to \infty$, resp. pro $x \to -\infty$, právě tehdy, když

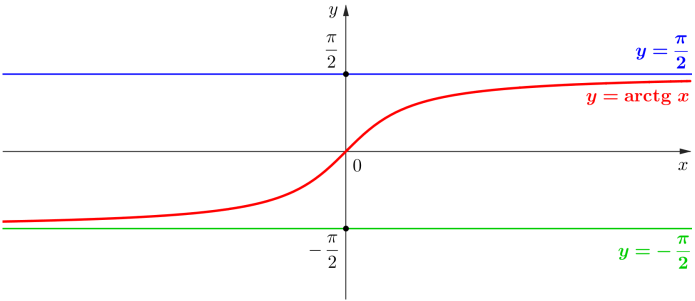
$$\boldsymbol{a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}, \qquad \boldsymbol{b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]}$$

resp.

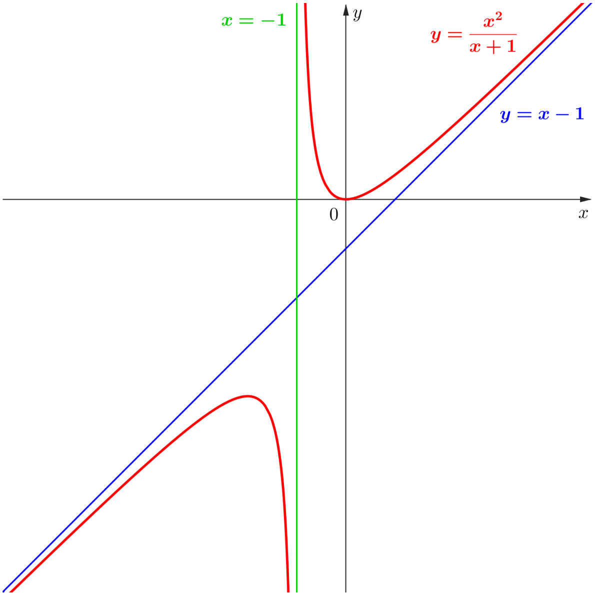
$$\boldsymbol{a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}}, \qquad \boldsymbol{b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax]}$$

## Asymptoty se směrnicí

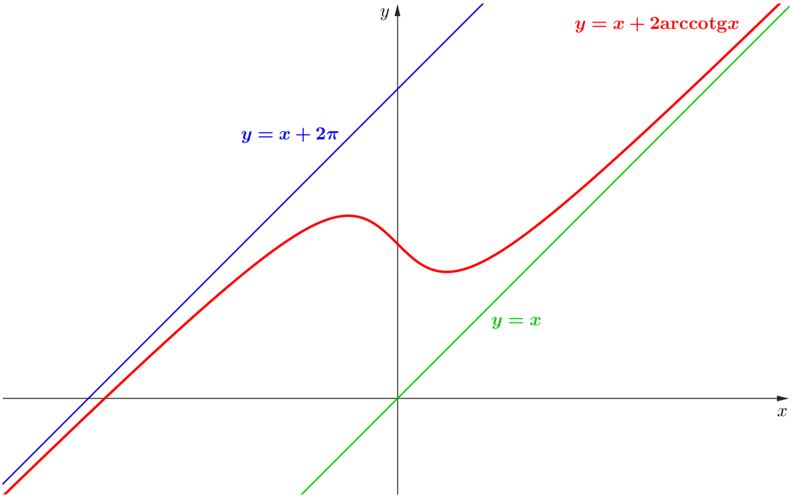
- pro $a = 0$ nazýváme také **vodorovné asymptoty**
- pro $a \neq 0$ nazýváme také **šikmé asymptoty**
- vodorovné asymptoty $y = b$ jsou rovnoběžné s osou $x$
- šikmé asymptoty $y = ax + b$ protínají osy $x$ a $y$
- pokud při výpočtu koeficientů $a, b$ jedna z limit **neexistuje nebo je nevlastní**, pak funkce asymptotu se směrnicí **nemá**



$y$
$\frac{\pi}{2}$
$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arctg} x$
0
$x$
$-\frac{\pi}{2}$
$y = -\frac{\pi}{2}$



$x = -1$
$y$
$y = \frac{x^2}{x+1}$
$y = x - 1$
0
$x$


$y$
$y = x + 2\mathrm{arccotg}\,x$
$y = x + 2\pi$
$y = x$
$x$

## Příklad

Určete asymptoty funkce $f$.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{6x^2+2}{2x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

d) $f(x) = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$

# 3.10 Průběh funkce

1. **Z předpisu funkce**: $D(f)$, znaménko funkce, průsečíky grafu s osami, sudost / lichost, periodičnost
2. **Z první derivace**: rostoucí a klesající, lokální extrémy
3. **Z druhé derivace**: konvexní a konkávní, inflexní body
4. **Asymptoty**: se směrnicí a bez směrnice
5. **Graf**: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace

## Příklad

Vyšetřete průběh funkce

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

# DĚKUJI
# ZA
# POZORNOST!